Výsledky z 4. domácí úlohy

27.10.2011

.

H1
a) $\lim_{n\to\infty}\log(n^2-5)=\infty$. Pro $C\in\mathbb{R}$ zvolím $n_0:=[(e^C+5)^{1/2}]+1$, pak je pro každé $n\in\mathbb{N},\ n\ge n_0$ $\log(n^2-5)>C$.

b) $\lim_{n\to\infty}\cos^2(\frac{n\pi}{2})$ neexistuje. Zvolím 2 vybrané posloupnosti $\{\cos^2(\frac{n_k\pi}{2})\}_{n=1}^{\infty}$ pro $n_k=2k,\ k\in\mathbb{N}$ a $n_k=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$. V prvním případě máme $\lim_{k\to\infty}\cos^2(\frac{n_k\pi}{2})=\lim_{k\to\infty}\cos^2(\frac{2k\pi}{2})=\lim_{k\to\infty}((-1)^k)^2=1$, avšak v případě druhém máme $\lim_{k\to\infty}\cos^2(\frac{(2k+1)\pi}{2})=\lim_{k\to\infty}0^2=0$. Z věty BD 3 z přednášky plyne výsledek.

H2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+6n+1}-\sqrt[3]{n^3-3}}{\sqrt{2n^4-n^3+n}-\sqrt{2n^4-n^3-6n}}=\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

Jestliže označíme $A=\sqrt[3]{n^3+6n+1}$, $B=\sqrt[3]{n^3-3}$, $C=\sqrt{2n^4-n^3+n}$ a $D=\sqrt{2n^4-n^3-6n}$, potom lze čitatel pronásobit výrazem $1=\frac{A^2+AB+B^2}{A^2+AB+B^2}$ a jmenovatel výrazem $1=\frac{C+D}{C+D}$. Užijeme vzorce $A^k-B^k=(A-B)(A^{k-1}+A^{k-2}B+...+AB^{k-1}+B^{k-1})$, ve složeném zlomku vytkneme z čitatele i ze jmenovatele výraz $\frac{n}{n^2}$ a zkrátíme. Použijeme VOAL a Heineho větu [spojitost funkcí $f(x)=x^{1/3},\ f(x)=x^{2/3},\ f(x)=\sqrt{x}$ v bodech (postupně) 1, 1, 2]. Za dalšího použití VOAL dostáváme výraz

$$\frac{\frac{6}{1+1+1}}{\frac{7}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}}=\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

H3 Například pro posloupnosti $a_n=n$, $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$ platí

1. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty\in\mathbb{R}^*$,
2. $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0\in\mathbb{R}$, neboť $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ a $c_n:=(-1)^n$ je omezená posloupnost,
3. $\lim_{n\to\infty}a_n+b_n=\lim_{n\to\infty}n+\frac{(-1)^n}{n}\overset{VOAL}{=}\infty+0=\infty\in\mathbb{R}^*$,
4. $\lim_{n\to\infty}a_n-b_n=\lim_{n\to\infty}n-\frac{(-1)^n}{n}\overset{VOAL}{=}\infty-0=\infty\in\mathbb{R}^*$,

avšak $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}n\frac{(-1)^n}{n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ neexistuje.